

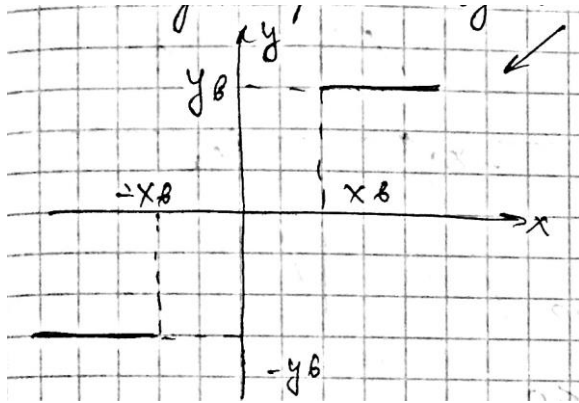
Билет №3

1) Основные специфические свойства НЛС. Неограниченный рост сигнала в ограниченное время.

Зависимость поведения от начальных условий.

1. Основные свойства НЛС:

- Неограниченный рост сигнала за ограниченное время t .



Неограниченный рост, например.

- Особые точки системы.

Их может быть несколько

- Периодические незатухающие колебания в НС называются предельным циклом.

Они могут быть несинусоидальными и с другой стороны они могут быть на такой частоте, на которой вход. Но не обязательно.

- Неединственность динамических характеристик.

- Скачок амплитуды в резонансе

Два этих пункта можно объединить.

- Синхронизация.

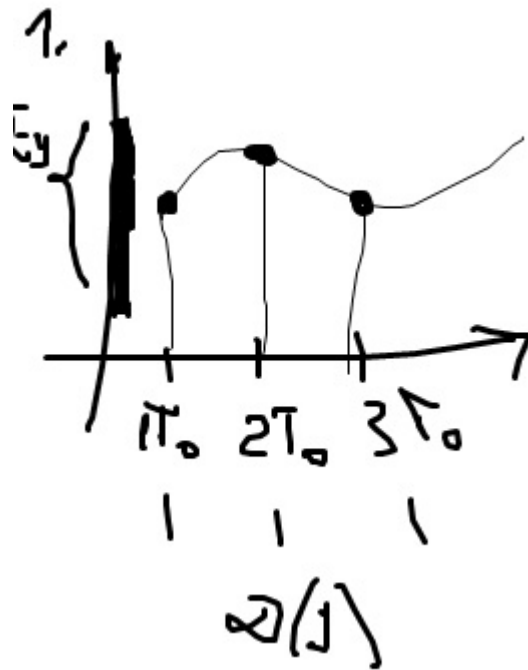
Японское видео с метрономами (особенность нелинейных маятников)

- Структурная неустойчивость (бифуркация) – перестройка фазового портрета.

Метод описания структурной неустойчивости.

- Хаотическая динамика.

Если у нас есть система и мы с ней что-то сделали и оставили в каких-то начальных условиях она будет как-то двигаться в фазовом пространстве, если система не хаотическая и мы сделали все тоже, что и в прошлый раз, она будет двигаться практически так же, как и раньше, а хаотическая будет двигаться произвольно.



Запишем разностные уравнения (правая и левая разности соответственно):

$$\begin{aligned}
 & x(n+1) - x(n) = F(x) = \Delta x \\
 & x(n) - x(n-1) = F(x) = \nabla x
 \end{aligned}$$

(дельта и набла)

Пример преобразования экспоненциальной функции из непрерывной в дискретную.

Дана какая-то непрерывная экспоненциальная функция:

$$y(t) = e^{\alpha t}$$

Фактически наш переход от непрерывного времени к дискретному

$$t \rightarrow nT_0$$

отражается следующим образом:

$$y(t) \rightarrow y(n) = e^{\alpha \cdot n T_0} = e^{\alpha T_0 \cdot n}$$

$y(n)$ – дискретная функция.

Представление явной функции в виде разностного уравнения:

См. пункт 2, но лучше взять из учебника.

Левые и правые производные:

Определение производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если функция определено только в дискретный момент времени T_0 :

$$f'(n T_0) \Rightarrow f(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{T_0} =$$

$$(n) - (n-1) = \nabla f$$

$$(n+1)T_0 - nT_0 = T_0$$

Два равно = это имеется ввиду что Игорь Аж сказал либо так либо так, хз.

Левые и правые разности заменяют производные.

Пример дискретизации уравнения первого порядка:

См. в учебнике или в лекциях.

$$\frac{dy}{dt} = ax$$

$$\Delta y = ax$$

$$y(n+1) = ax + y(n)$$

Дифференциальное и дискретное уравнения.

Решетчатые функции: см. книгу.

приближенно рассматривать как дискретный сигнал $x_T(kT_0)$, показанный на рис. 3.1.2. В этом случае ключ действует как идеальный квантователь, и величины $x_T(kT_0)$ равны мгновенным значениям амплитуд.

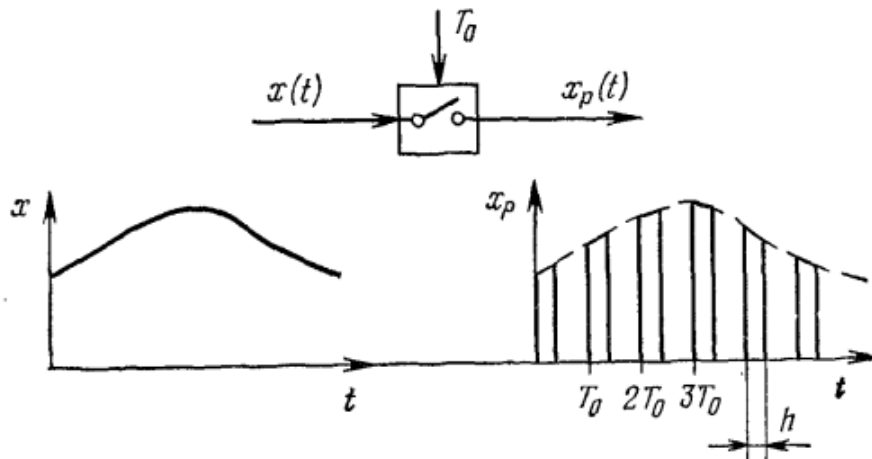


Рис. 3.1.1. Формирование амплитудно-модулированного дискретного сигнала путем пропускания непрерывного сигнала через ключ с периодом замыкания T_0 и продолжительностью замыкания h .

Модулированная по амплитуде дискретная функция $x_T(t)$, получаемая путем квантования по времени непрерывного сигнала $x(t)$ с постоянным тактом T_0 , математически описывается выражением

$$\left. \begin{aligned} x_T(t) &= x(kT_0) \text{ при } t = kT_0, \\ x_T(t) &= 0 \text{ при } kT_0 < t < (k+1)T_0; \end{aligned} \right\} k=0, 1, 2, \dots \quad (3.1-1)$$

Формирование дискретных по времени функций различных типов иллюстрируется приведенными ниже примерами.

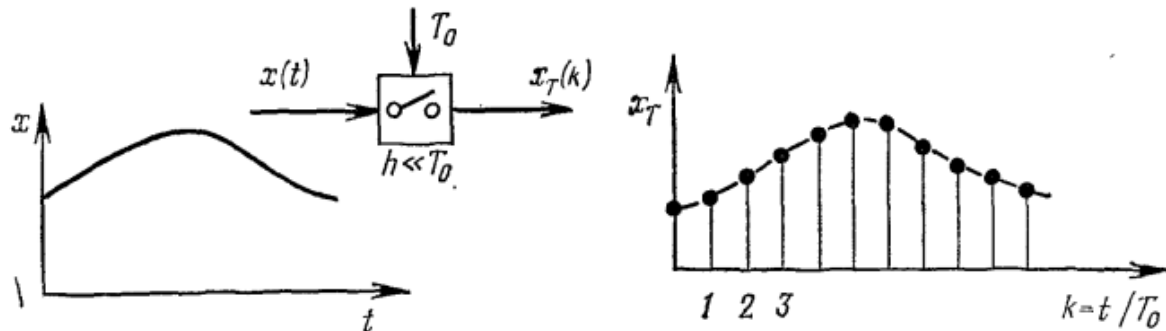


Рис. 3.1.2. Дискретный сигнал $x_T(k)$, получаемый на выходе квантователя ($h \ll T_0$).

Пример 3.1.1.

а) В результате квантования непрерывная функция времени

$$x(t) = e^{-\alpha t}$$

преобразуется в дискретную по времени функцию ($t = kT_0$)

$$x(kT_0) = e^{-\alpha kT_0}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, эти функции связаны явным соотношением

$$x_T(t) = x(kT_0).$$

б) Операция интегрирования

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^t w(t) dt$$

выполняется численно путем аппроксимации $w(t)$ ступенчатой функцией. При этом интеграл заменяется суммой

$$x(kT_0) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^{k-1} T_0 w(vT_0).$$

Поскольку $x(kT_0)$ зависит от второй дискретной функции, т. е.

$$x_T(t) = x(kT_0) = f[w(vT_0), kT_0],$$

результат записывается в неявной форме.

В следующем примере показывается, как неявную функцию можно представить в виде разностного уравнения.

Пример 3.1.2. Из выражения, полученного в примере 3.1.1, б, следует, что

$$x((k+1)T_0) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^k T_0 w(vT_0).$$

После вычитания имеем

$$x((k+1)T_0) - x(kT_0) = \frac{T_0}{T} w(kT_0)$$

или

$$x(k+1) + a_1 x(k) = b_1 w(k).$$

Уменьшив k на 1, приходим к окончательному соотношению

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 w(k-1),$$

где $a_1 = -1$; $b_1 = T_0/T$.

Это — линейное разностное уравнение первого порядка.

Для получения разностного уравнения достаточно любую дискретную функцию, зависящую от другой дискретной функции, представить в рекуррентной форме. Линейное разностное уравнение порядка m имеет вид

$$\begin{aligned} x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) = \\ = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m). \end{aligned} \quad (3.1-2)$$

Здесь аргумент kT_0 заменен индексом k . Величину выходного сигнала при любом k можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} x(k) = -a_1 x(k-1) - \dots - a_m x(k-m) + \\ + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m), \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

если известны текущее значение входа $w(k)$ и m предшествующих значений $w(k-1), \dots, w(k-m)$, а также соответствующие значения выхода $x(k-1), \dots, x(k-m)$.

Другой способ построения разностных уравнений состоит в дискретизации дифференциальных уравнений. При этом дифференциальное уравнение первого порядка аппроксимируется разностным уравнением первого порядка, дифференциальное уравнение второго порядка — разностным уравнением второго порядка и т. д. При замене дифференциалов левыми разностями справедливы следующие соотношения:

<u>Непрерывная функция</u>	<u>Дискретная функция</u>
первая производная $\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$	разность первого порядка $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$
вторая производная $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t}$	разность второго порядка $\Delta^2 x(k) = \Delta x(k) - \Delta x(k-1) =$ $= x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

В следующем примере показано, как осуществляется дискретизация дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 3.1.3. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$T \frac{dx(t)}{dt} = w(t).$$

Заменяя дифференциал левой разностью, полученной при такте квантования T_0 , имеем выражение

$$x(k) - x(k-1) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Если для дискретизации применяется правая разность

$$\Delta x'(k) = x(k+1) - x(k),$$

то получается то же уравнение, что и в примере 3.1.2:

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Описанные способы аппроксимации дают удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда такт квантования T_0 мал по сравнению с постоянной времени T .

Выражение (3.1-2) является наиболее распространенной формой записи разностных уравнений. Если использовать разности высших порядков вплоть до m -го, разностное уравнение можно представить

в виде, аналогичном дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \alpha_m \Delta^m x(k) + \alpha_{m-1} \Delta^{m-1} x(k) + \dots + \alpha_1 \Delta x(k) + x(k) = \\ = \beta_m \Delta^m w(k) + \beta_{m-1} \Delta^{m-1} w(k) + \dots + \beta_1 \Delta w(k) + \beta_0 w(k). \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

Впоследствии будет описан еще один метод получения разностных уравнений, справедливый и при больших значениях такта квантования T_0 .

Разностные уравнения. В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать *разностные уравнения (уравнения в конечных разностях)*. При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид

$$b_0 \Delta^m y[n] + b_1 \Delta^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n], \quad (15.14)$$

где $f[n]$ — заданная, а $y[n]$ — искомая решетчатые функции. При $f[n] \equiv 0$ уравнение (15.14) становится однородным разностным уравнением, решением которого будет $y[n]$.

При использовании (15.8) разностное уравнение (15.14) можно записать в другом виде:

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n]. \quad (15.15)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются из зависимости

$$a_k = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (15.16)$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!} \quad (15.17)$$

При использовании обратных разностей уравнение в конечных разностях будет

$$b_0 \nabla^m y [n] + b_1 \nabla^{m-1} y [n] + \dots + b_m y [n] = f [n]. \quad (15.18)$$

С учетом формулы (15.9) последнее выражение приобретает вид

$$a_0 y [n] + a_1 y [n-1] + \dots + a_m y [n-m] = f [n]. \quad (15.19)$$

Коэффициенты последнего уравнения определяются выражениями

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (15.20)$$

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!} \quad (15.21)$$

Разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения $y [n+m]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ для заданных начальных значений $y [0], y [1], \dots, y [m-1]$ и уравнения вида (15.15) или значения $y [n]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ для заданных начальных значений $y [n-m], y [n-m+1], \dots, y [n-1]$ и уравнения вида (15.19). Такие вычисления легко механизуются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже в случае, когда коэффициенты разностных уравнений a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y [n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_m z_m^n, \quad (15.22)$$

где z_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (15.23)$$

а C_i — произвольные постоянные.

Из (15.22), в частности, вытекает условие того, чтобы свободное движение системы, описываемой разностным уравнением (15.15), было бы затухающим (условие устойчивости):

$$|z_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.24)$$

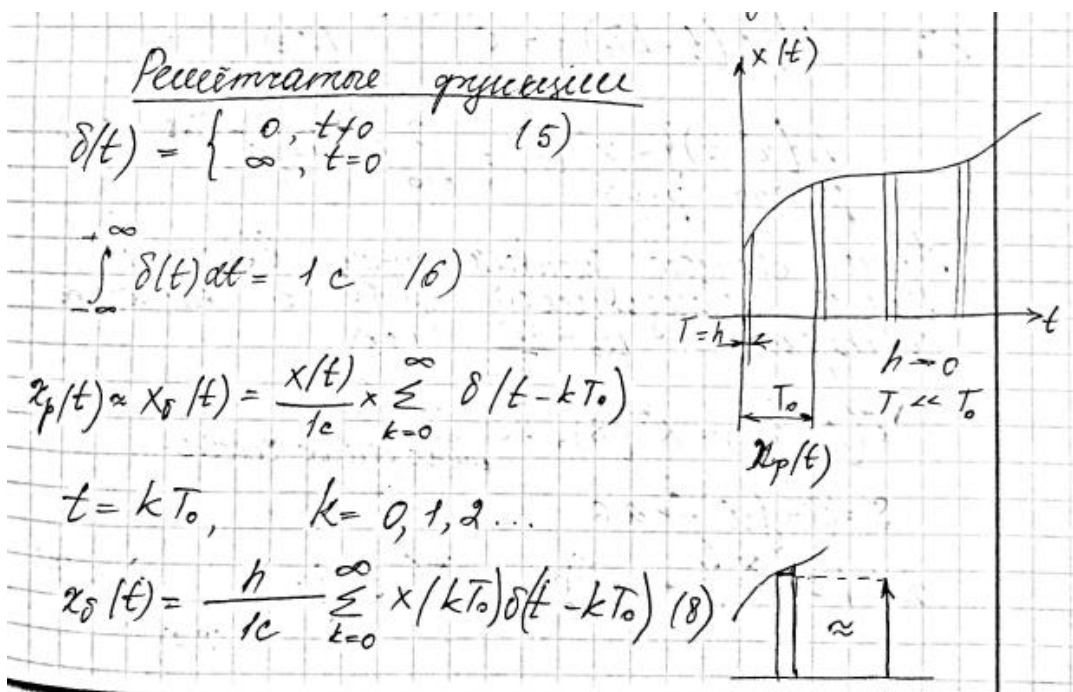
Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используются дискретное преобразование Лапласа, z -преобразование, w -преобразование, а также частотные методы, которые будут изложены ниже.

Решетчатая функция времени $x[nT]$, или в сокращенной записи $x[n]$ - это математическая функция, значения которой определены в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени $t = nT$, где n - целое положительное число $0, 1, 2, \dots$, а T - период дискретности. То есть решетчатая функция представляет собой числовую последовательность:

$$x[0], x[1T], x[2T], x[3T], \dots, x[kT], \dots$$

Если период дискретности T задан, то решетчатая функция однозначно формируется из исходной непрерывной.

Обратная задача - формирование непрерывной функции из решетчатой - не может быть решена однозначно без дополнительных сведений о поведении функции в интервале между точками $t = nT$, так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций.



h настолько маленькая величина, что мы можем использовать вместо нее δ функцию.

Интеграл от дельта функций равен единице, а дискретная функция представляет собой произведение дельта функции на какое-то число.

Умно $h = T_0$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0) \quad (9)$$

Упр-ние (9) справедливо при $h \ll T_0$ и при условии канонической след. с-мы, правдой

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Преобразование Лапласа. Преобразование к аналоговой системе. Ф-ция времени

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad (2.2)$$

$$kT_0 \quad \mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\} = e^{-kT_0 s} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) e^{-kT_0 s} \quad (2.4)$$

решетч. ф-ция

Фр-ие Лапласа решетч. ф-ции времени эквив-на преобразованию ф-ции с частотой ω_0 по переменной $\omega = \frac{\omega_0}{T_0}$ (2.5)

$$X^*(s + j\omega_0) = X^*(s), \quad \forall s \in \mathbb{Z} \text{ и } \omega_0 \text{ максимал}$$

$$s = (\sigma + j\omega) \rightarrow 2.6$$

$$X^*(\sigma + j(\omega + \omega_0 \nu)) = X^*(\sigma + j\omega) \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$